

# VECTEURS DE L'ESPACE

## I) DEFINITION : Vecteur de l'espace

**Définition :** Soient  $A, B$  deux points dans l'espace  $\mathcal{E}$

Si  $A$  et  $B$  sont distinctes alors Pour tout point  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  il existe un point unique  $N$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :  $MABN$  est un

parallélogramme et est écrit :  $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{MN}$   
Si  $A$  et  $B$  sont confondues alors :  $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{MN}$  (vecteur nul)

**Remarques :** Si  $O$  un point dans l'espace  $\mathcal{E}$  alors pour tout vecteur  $\vec{u}$  de l'espace il existe un point unique  $M$  dans l'espace  $\mathcal{E}$  tel que :  $\vec{OM} = \vec{u}$   
L'application :  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow V_3$

$$M \mapsto \vec{OM} = \vec{u} \text{ est une bijection}$$

L'ensemble des vecteurs se note  $V_3$

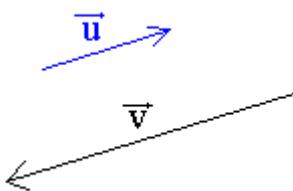
Un vecteur non nul  $\vec{u} = \vec{AB}$  est caractérisé par :  
Sa direction : c'est la direction de la droite  $(AB)$

Son sens : de  $A$  à  $B$

Sa norme :  $\|\vec{u}\| = \|\vec{AB}\| = AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

Deux vecteurs peuvent avoir la **même direction** de tels vecteurs sont **colinéaires**



$\vec{AB} = \vec{MN}$  ssi  $ABNM$  est un parallélogramme

## II) LES OPERATIONS DANS $V_3$ .

### 1) L'addition.

**Définition :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls de  $V_3$  ; Soient les points  $O : A ; B$

tel que  $\vec{u} = \vec{OB}$  et  $\vec{v} = \vec{OC}$

la somme des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{OD}$  tel que :  $OBDC$  est un parallélogramme

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OD}$$

**Propriété :** L'addition dans  $V_3$  a les propriétés suivantes :

L'addition dans  $V_3$  est **commutative** :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

L'addition dans  $V_3$  est **associative**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$  et  $\forall \vec{w} \in V_3$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

$\vec{0}$  Est l'**élément neutre** pour l'addition dans

$$V_3. \forall \vec{u} \in V_3 : \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Tout vecteur  $\vec{u}$  de  $V_3$  admet un **opposé**

$$\text{noté } -\vec{u} : \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

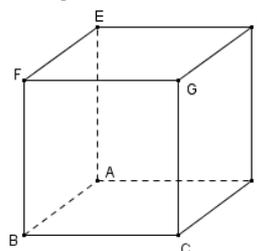
Puisque la somme de deux vecteurs vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que :

$(V_3, +)$  est un groupe commutatif.

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de  $V_3$  la différence des deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est la somme de  $\vec{u}$  et de  $(-\vec{v})$  et se note :  $\vec{u} - \vec{v}$

et on a donc :  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

### Exemple :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier :

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH}$$

**Solution :**

$$\text{On a : } \vec{AB} = \vec{DC}$$

$$\vec{t} = \vec{DC} + \vec{DE} + \vec{FH} = \vec{AB} + (\vec{DA} + \vec{AE}) + \vec{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FH} = \vec{DB} + \vec{AE} + \vec{BD} \text{ Car}$$

$\vec{FH} = \vec{BD}$  (FHDB est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \vec{BD} + \vec{DB} + \vec{AE} = \vec{BB} + \vec{AE} = \vec{0} + \vec{AE} = \vec{AE}$$

### 2) Produit d'un vecteur par un réel.

**Définition :**  $\forall \vec{u} \in V_3$  et  $\forall \vec{v} \in V_3$

Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul et  $k$  un réel non nul et on pose :  $\vec{u} = \vec{AB}$

sur la droite  $(AB)$  il existe un seul point  $C$  tel que  $\vec{AC} = k\vec{u}$

Le vecteur  $\vec{v} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$  s'appelle le produit du réel  $k$  et du vecteur  $\vec{u}$

on pose pour tout  $k$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$k\vec{0} = \vec{0} \text{ et } \forall \vec{u} \in V_3 \quad 0\vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{on a : } k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } k = 0$$

**Propriété :** Le produit d'un vecteur par un réel a les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$3) 1\vec{u} = \vec{u} \quad 4) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

Puisque  $(V_3, +)$  est un groupe commutatif et le produit d'un réel par un vecteur vérifie les quatre propriétés précédente on dit que :

**$(V_3, +, \cdot)$  est un espace vectoriel réel.**

**Remarque :**

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$$

$$3) \alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$$

### III) VECTEURS COLINEAIRES.

#### 1) Vecteur colinéaires

**Définition :** On dit que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un réel  $k$  tel que :

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u}$$

**Remarque :** Tout vecteur est colinéaire avec lui-même :  $\vec{u} = k \cdot \vec{u}$

Tout vecteur est colinéaire avec  $\vec{0}$

$$\text{car : } \vec{u} \cdot 0 = \vec{0}$$

On a :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires ssi  $(AB) \parallel (CD)$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls

A et B et C non alignés ssi  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires

A et B et C non alignés  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

**Exemple :** ABCDEFGH un cube et K milieu du segment  $[EF]$  et L milieu du segment  $[CF]$  et

M un point du segment  $[CD]$  tel que :

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} \text{ Montrer que : } (ML) \parallel (DK)$$

**Solution :** en utilisant la Relation de Chasles

On a :  $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CM}$  et puisque : L milieu du

segment  $[CF]$  Alors :  $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$$\text{donc : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) \quad (1)$$

D'autre part On a :  $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK}$  et

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CD} \text{ Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{CD}$$

et puisque : K milieu du segment  $[EF]$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} \text{ donc : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ (car : } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD})$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$$

donc  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{ML}$  sont colinéaires

Donc :  $(ML) \parallel (DK)$

**Propriété :** Si on a :  $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$  avec

$a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires

**Exemple :**  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels  $x$  et  $y$  tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\text{Solution : } x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$(x + y - 2)\vec{u} + (2x + 3y - 5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

#### 2) Droite vectorielle

**Définition :** Soit  $\vec{u}$  un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur  $\vec{u}$  s'appelle : **la droite vectorielle**

**engendrée par le vecteur  $\vec{u}$  et se note  $\Delta_{\vec{u}}$**

$$\Delta_{\vec{u}} = \left\{ \vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u} \right\}$$

$$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires

$$\text{alors } \Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

#### 3) Détermination vectorielle d'une droite

**Définition :** Soient  $\vec{u}$  un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine  $\mathcal{E}$ . L'ensemble des points M dans l'espace  $\mathcal{E}$  qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$

où  $k$  est un réel s'appelle la droite qui passe par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}$ . On la note par  $D(A; \vec{u})$  :

$$D(A; \vec{u}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u}\}$$

**Remarque :**

- Le couple  $(A, \vec{u})$  détermine un repère sur la droite  $D(A; \vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec  $\vec{u}$  est aussi vecteur Directeur de la droite  $D(A; \vec{u})$

#### IV) VECTEURS COPLANAIRES.

##### 1) vecteurs coplanaires.

**Rappelle :**

Un plan est défini par :

- Trois points non alignés
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs et  $A$  un point l'espace

on pose  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

On dit que : les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ssi les points  $A, B, C$  et  $D$  sont coplanaires

**Propriété :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

**Remarque :** si  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurs  $\vec{w}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}$  sont coplanaires

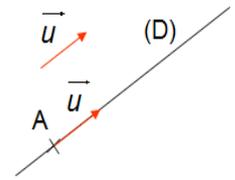
##### 2) Plan vectoriel

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs  $\vec{w}$  dans  $V_3$  qui s'écrivent de la forme :  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $x$  et  $y$  sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$

##### 3) Détermination vectoriel d'un plan.

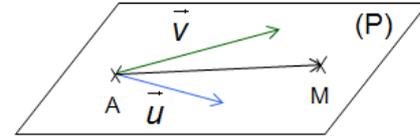
**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires et  $A$  un point de l'espace  $\mathcal{E}$  l'ensemble des point  $M$  dans l'espace qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  est le plan qui passe par  $A$  et de vecteurs directeurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ , on le note

par :  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$



$$P(A; \vec{u}; \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}\}$$

Le triplet  $R(A; \vec{u}; \vec{v})$  s'appelle un repère du plan  $(P)$  et le couple  $(x, y)$  s'appelle les coordonnées du point  $M$  dans le plan  $(P)$  muni du repère  $R$



**Exemple :** ABCDEFGH un parallélépipède de centre  $O$  et  $I$  milieu du segment  $[AD]$

on pose  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$  et  $\overrightarrow{IO} = \vec{w}$

Montrer que :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Solution :** On a :  $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$  et on a  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle  $ADF$

et puisque :  $I$  milieu du segment  $[AD]$

et  $O$  milieu du segment  $[FD]$

on trouve :  $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$  Donc :  $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AK}$

et puisque :  $K$  milieu du segment  $[AF]$

cad  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

et On considérons le point  $L$  tel que  $AFCL$  est un parallélogramme on trouve :  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$

Alors :  $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$  et  $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

Donc :  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

**Exemple :** ABCDEFGH un cube

$M$  milieu du segment  $[HE]$  et  $N$  milieu du segment  $[HG]$

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont-ils coplanaires ? justifier

**Solution :** On considérons le triangle  $HEG$  et puisque :  $M$  milieu du segment  $[HE]$   $N$  milieu du segment  $[HG]$  on trouve :  $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{MN}$

et puisque  $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$  : alors  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$  donc

Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires et par suite Les vecteurs  $\overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{CH}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires

## V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

### 1) Parallélisme de deux droites

**Définition :** Soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs et A et B deux points de l'espace

1)  $D(A; \vec{u}) \parallel D(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que :  $A \neq B$  et  $C \neq D$  :  $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}; \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

**Exercice 01:** ABCD un tétraèdre et E le milieu du [BC] et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

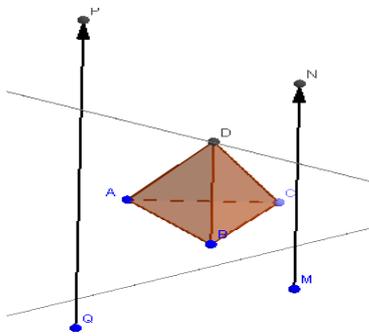
1) Tracer une figure

2) Ecrire  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  en fonction de  $\overrightarrow{BD}$

3) En déduire que  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

**Solution :1)**



$$2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{PQ} = -3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -3\overrightarrow{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \text{ ①}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on trouve : } \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

donc :  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

4) on a  $\overrightarrow{MN}$  et  $\overrightarrow{PQ}$  sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

**Exercice 02 :** ABCD un tétraèdre et E le milieu du [BC] et soit les points K ; L tel que :

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Montrer que (LD)  $\parallel$  (EK)

**Solution :** pour montrer que (LD)  $\parallel$  (EK) il suffit

de montrer que :  $\overrightarrow{LD}$ ,  $\overrightarrow{EK}$  sont colinéaires ??

On a :  $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$  on utilisant la Relation de Chasles

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left( \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et}$$

$$\text{puisque : } \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left( \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ ①}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \text{ ②}$$

$$\text{de ① et ② on déduit que : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$$

donc : (LD)  $\parallel$  (EK)

### 2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

**Propriété :** La droite  $D(A; \vec{u})$  et le plan P

$P(B; \vec{v}; \vec{w})$  sont parallèles si et seulement si les

vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires

$$D(A; \vec{u}) \parallel P(B; \vec{v}; \vec{w}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

**Exemple :** ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport a H

Montrer que (AK)  $\parallel$  (BCG)

$$\text{Solution : on a : } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

donc : Les vecteurs  $\overrightarrow{AK}$ ,  $\overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{CG}$  sont coplanaires

on déduit que :  $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc : (AK)  $\parallel$  (BCG)

### 3) Parallélisme de deux plans

**Propriété :** Deux plans  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$  et  $Q(B; \vec{u}'; \vec{v}')$

sont parallèles si et seulement si

$\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{u}'$  sont coplanaires et  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  sont coplanaires aussi

**Remarque :** Une seule condition n'est pas suffisante